DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2012.12.028

第 30 卷 第 12 期　　河 南 科 学　　Vol.30 No.12
2012 年 12 月　　HENAN SCIENCE　　Dec. 2012

文章编号：1004-3918(2012)12-1698-03

一个算术函数和 Smarandache 无理根筛数列的性质

祁 兰

(榆林学院 数学系，陕西 榆林 719000)

摘 要：设 p 为素数，$e_p(n)$ 表示 n 中包含素数 p 的最大指数．主要研究 $e_p(n)$ 作用在无理根筛数列上的均值性质，并给出一个有趣的渐近公式．

关键词：最大指数；Smarandache 无理根筛序列；渐近公式

中图分类号：O 156.4　　文献标识码：A

The Properties of an Arithmetical Function and the Smarandache Irrational Root Sieve

Qi Lan

(Department of Mathematics, Yulin University, Yulin 719000, Shaanxi China)

Abstract: Let p be a prime, $e_p(n)$ denote the largest exponent of power p which is included n. This paper mainly studies the mean value properties of $e_p(n)$ acting on the irrational root sieve sequences, and give an interesting asymptotic formula.

Key words: largest exponent; Smarandache irrational root sieve; asymptotic formula

1 引言与结论

从自然数集合中(除 0 与 1)去掉所有的 2^k，$k\geqslant 2$(例如 4，8，16，32，64，…)去掉所有的 3^k，$k\geqslant 2$ 去掉所有的 5^k，$k\geqslant 2$ 去掉所有的 6^k，$k\geqslant 2$ 去掉所有的 7^k，$k\geqslant 2$ 去掉所有的 10^k，$k\geqslant 2$；……等等，依次继续下去，我们可以得到 Smarandache 无理根筛数列：2，3，5，6，7，10，11，12，13，14，15，17，18，19，…，设 A 表示所有的无理根筛集合．对任意素数 p，设 $e_p(n)$ 表示整除 n 的 p 最大指数，即 $e_p(n)=\max\{\alpha: p^\alpha | n\}$．在文献[1]中，F. Smarandache 教授建议我们研究 $e_p(n)$ 和无理根筛数列的性质．国内已有许多学者研究了 $e_p(n)$ 的性质，可参阅文献[2-5]，但关于 $e_p(n)$ 和无理筛数列的渐近性质还尚未见到有人研究．本文主要利用解析的方法给出 $e_p(n)$ 作用在无理根筛数列上的均值性质，并给出了一个有趣的渐近公式，即是下面的定理：

定理 设 p 为素数，则对任意实数 $x\geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} e_p(n)=\frac{1}{p-1}x-\frac{2}{p-1}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{p-1}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

2 定理的证明

为了完成定理的证明，我们需要下面一个简单引理：

收稿日期：2012-09-11

基金项目：陕西省教育厅科技计划项目(11JK0489)；榆林学院科研基金项目(11YK30)

作者简介：祁 兰(1979-)，女，陕西榆林人，讲师，主要研究方向为数论．

引理　设 p 为素数，对任意实数 $x\geqslant 1$，$m\geqslant 0$ 是一个整数，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n^m)=\frac{m}{p-1}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明　设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n^m)}{n^s}$，当 s 的实部较大时，$f(s)$ 绝对收敛．由 Euler 乘积公式[6]及算术函数 $e_p(n)$ 的定义有

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n^m)}{n^s}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{\infty}\frac{m\alpha}{(p^{\alpha}l)^s}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{m\alpha}{p^{\alpha s}}\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{l^s}=$$

$$\frac{mp^s}{(p^s-1)^2}\prod_{q\neq p}\left(1+\frac{1}{q^s}+\frac{1}{q^{2s}}+\cdots\right)=\frac{m\zeta(s)}{p^s-1},$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数．显然有

$$e_p(n^m)\leqslant m\log_p n\leqslant m\ln n,$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n^m)}{n^{\sigma}}\right|\leqslant\frac{m}{\sigma-1},$$

其中 σ 是 s 的实部，则由 Perron 公式[7]，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n^m)}{n^{s_0}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+$$

$$O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left\{1,\frac{\log x}{T}\right\}\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left\{1,\frac{x}{||x||}\right\}\right),$$

其中：N 离 x 最近的整数，$||x||=|x-N|$．

取 $s_0=0$，$b=\frac{3}{2}$，$H(x)=m\ln x$，$B(\sigma)=\frac{m}{\sigma-1}$，有

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(n^m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{m\zeta(s)}{p^s-1}\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T}\right),$$

现在来估计主项 $\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{m\zeta(s)}{p^s-1}\frac{x^s}{s}ds$，将积分线从 $s=\frac{3}{2}\pm iT$ 移至 $s=\frac{1}{2}\pm iT$．则 $R(s)=\frac{m\zeta(s)}{p^s-1}\frac{x^s}{s}$ 在 $s=1$ 处有一个一阶极点，留数为 $\frac{mx}{p-1}$，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}+\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{m\zeta(s)}{p^s-1}\frac{x^s}{s}ds=\frac{mx}{p-1}.$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi i}\left|\left(\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{m\zeta(s)}{p^s-1}\right|\ll\frac{x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T},$$

取 $T=x$，可得

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(n^m)=\frac{m}{p-1}x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

于是完成了引理的证明．

由引理可得

$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{2}}} e_p(n^2)=\frac{2}{p-1}x^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}} e_p(n^3)=\frac{2}{p-1}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}+\varepsilon}\right).$$

下面我们利用引理来证明定理．根据集合 A 定义和引理的结论，可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} e_p(n)=\sum_{n\leqslant x} e_p(n)-\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{2}}} e_p(n^2)-\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}} e_p(n^3)+O\left(\sum_{4\leqslant k\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}} x^{\frac{1}{k}+\varepsilon}\right)=$$

$$\frac{1}{p-1}x-\frac{2}{p-1}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{p-1}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

于是就完成了定理的证明．

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Liu Hongyan, Zhang Wenpeng. A number theretic function and its mean value property[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 155-159.

[3] Zhang Wenpeng. An arithmetic function and the primitive number of power p[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory. Phoenix USA: Hexis, 2004: 1-4.

[4] Ren Ganglian. A number theoretic function an its mean value[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory. Phoenix USA: Hexis, 2005: 19-22.

[5] 高 丽，祁 兰，赵院娥. 一个算术函数和正整数的 k 次根的整部（英文）[J]. 吉首大学学报, 2005, 26(4): 76-78.

[6] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer Verlag, 1976.

[7] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社 1991.

（编辑 康 艳）